VARIASI METODE CHEBYSHEV DENGAN ORDE KEKONVERGENAN OPTIMAL UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Julia Murni[1*], **Sigit Sugiarto**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*julia.murni@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses variants of Chebyshev's methods to solve a nonlinear equation. Analytically, it is shown that the methods are of four order. Numerical comparisons show that the proposed methods are better than Newton's method, Chebyshev's method, Chebyshev-Halley's method, and Jarratt's method in performance, in terms of succeeding in obtaining the root.

Keywords: efficiency index, family of Chebyshev's method, nonlinear equation, order of convergence, variants of Chebyshev's method.

ABSTRAK

Artikel ini membahas variasi metode Chebyshev dengan orde kekonvergenan optimal untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode ini mempunyai kekonvergenan berorde empat. Perbandingan numerik dari beberapa metode iterasi seperti merode Newton , metode Chebyshev, metode Chebyshev-Halley, metode Jarat, famili metode Chebyshev, dan variasi metode Chebyshev, menunjukkan keunggulan metode yang dibahas dalam mendapatkan akar yang dicari.

Kata kunci: indek efisiensi, metode famili Chebyshev, persamaan nonlinear, orde konvergensi, dan variasi metode Chebyshev.

1. PENDAHULUAN

Persoalan matematika yang sering dijumpai adalah bagaimana menemukan akar dari persamaan nonlinear yang dinyatakan dengan

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Formula untuk mendapatkan penyelesaian persamaan (1) secara analitik terkadang tidak tersedia, sehingga digunakan metode numerik yang berbentuk metode iterasi untuk mendapatkan solusi aproksimasi.

Banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear (1). Salah satunya adalah metode iterasi yang diperkenalkan oleh Hernandez [2] merupakan metode Chebyshev-Halley, dengan bentuk iterasinya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1 + \frac{\alpha f^{(2)}(x_n) f(x_n)}{2\alpha f'(x_n)^2 - f^{(2)}(x_n) f(x_n)}\right). \quad (2)$$

Metode pada persamaan (2) mempunyai kekonvergenan orde tiga [2]. Untuk mendapatkan metode yang berorde lebih tinggi Ramandeep Behl dan V. Kanwar [1] menggunakan variasi metode Chebyshev untuk menyelesaikan persamaan nonlinear, yang didiskusikan dalam artikel mereka yang berjudul *"Variants of Chebyshev's Method with Optimal Order of Convergence"* [1]. Metode yang dikemukakan Ramandeep Behl dan V. Kanwar inilah yang di*review* pada tulisan ini.

Pada artikel ini di bagian dua membahas variasi metode Chebyshev dengan orde kekonvergenan optimal, kemudian dilanjutkan pada bagian tiga dibahas analisa kekonvergenan metode famili Chebyshev dan variasi metode Chebyshev, dan pada bagian empat melakukan uji komputasi.

2. VARIASI METODE CHEBYSHEV DENGAN ORDE KEKONVERGENAN OPTIMAL

Pada bagian ini didiskusikan famili metode Chebyshev dan variasi metode Chebyshev.

2.1 Famili Metode Chebyshev

Penurunan metode famili Chebyshev dengan menggunakan ekspansi Taylor. Misalkan x^* akar dari persamaan (1) dan $x = x_0$ tebakan awal yang diketahui, dengan mengasumsikan

$$x_1 = x_0 + h, \quad |h| < 1.$$

Dengan mengekspansi fungsi $f(x_1)$ di sekitar $x_1 = x_0$ menggunakan Teorema Taylor, dan mempertahankan $O(h^2)$, maka

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{(x_1 - x_0)}{1!} + f^{(2)}(x_0)\frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}. \quad (3)$$

Setelah melakukan penyederhanaan pada persamaan (3), diperoleh

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{h^2}{2}\frac{f^{(2)}(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (4)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan yang telah dikembangkan oleh Schroder [4] diperoleh

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) f'(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^2 - \alpha f(x_0) f^{(2)}(x_0)},$$

dengan memisalkan

$$x_1 - x_0 = h = -\frac{f(x_0)f'(x_0)}{(f'(x_0))^2 - \alpha f(x_0)f^{(2)}(x_0)}. \tag{5}$$

Kemudian dengan mengaproksimasi h pada ruas kanan pada persamaan (4), dengan persamaan (5) setelah dilakukan penyederhanaan, diperoleh

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2}\frac{(f(x_0))^2 f'(x_0)f^{(2)}(x_0)}{\Bigg((f'(x_0))^2 - \alpha f(x_0)f^{(2)}(x_0)\Bigg)^2}.$$

Karena $h = x_1 - x_0$ maka bentuk persamaan (6) menjadi

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2}\frac{(f(x_0))^2 f'(x_0)f^{(2)}(x_0)}{\big((f'(x_0))^2 - \alpha f(x_0)f^{(2)}(x_0)\big)^2}.$$

Lalu, rumus umum untuk aproksimasi berurutan dapat ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{(f(x_n))^2 f'(x_n)f^{(2)}(x_n)}{\Bigg((f'(x_n))^2 - \alpha f(x_n)f^{(2)}(x_n)\Bigg)^2}. \tag{6}$$

Persamaan (6) merupakan metode iterasi famili Chebyshev.

2.2 Variasi Metode Chebyshev dengan Orde Kekonvergenan Optimal
Diberikan iterasi metode berbentuk Newton dengan suatu parameter $a \in \mathbb{R}$

$$y_n = x_n - a\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{7}$$

selanjutnya persamaan (6) dimodifikasi dengan metode famili Chebyshev yaitu mengganti $f^{(2)}(x_n)$ dengan $f^{(2)}(y_n)$ maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{(f(x_n))^2 f'(x_n)f^{(2)}(y_n)}{\Bigg((f'(x_n))^2 - \alpha f(x_n)f^{(2)}(y_n)\Bigg)^2}. \tag{8}$$

Persamaan (8) adalah rumus iterasi dari variasi metode Chebyshev.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 1 (Orde Konvergensi Famili Metode Chebyshev) Misalkan $x^* \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat ke akar x^*, maka orde kekonvergenan famili metode Chebyshev pada persamaan (6) berorde tiga untuk $\alpha = \frac{1}{2}$.

Bukti: Perhatikan persamaan (6) misalkan $e_n = x_n - x^*$, dengan x^* adalah akar dari $f(x) = 0$, dengan menggunakan Teorema Taylor untuk mengekspansi $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ di sekitar $x_n = x^*$, dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - x^*)^j$ untuk $j \geq 4$, dan $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) =& f(x^*) + f'(x^*)\frac{(x_n - x^*)}{1!} + f^{(2)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^2}{2!} \\ &+ f^{(3)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^3}{3!} + f^{(4)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^4}{4!} + O(e_n^5). \end{aligned}$$

Karena $f(x^*) = 0$ dan $x_n - x^* = e_n$, maka diperoleh

$$f(x_n) = f'(x^*)\left(e_n + \frac{f^{(2)}(x^*)}{f'(x^*)2!}e_n^2 + \frac{f^{(3)}(x^*)}{f'(x^*)3!}e_n^3 + \frac{f^{(4)}(x^*)}{f'(x^*)4!}e_n^4 + O(e_n^5)\right), \tag{9}$$

atau

$$f(x_n) = f'(x^*)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5)\right), \tag{10}$$

dengan menyatakan $c_k = \frac{f^{(k)}(x^*)}{f'(x^*)k!}$. Jika $f'(x_n)$ diekspansikan dengan Teorema Taylor disekitar $x_n = x^*$, maka

$$\begin{aligned} f'(x_n) =& f'(x^*) + f^{(2)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)}{1!} + f^{(3)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^2}{2!} + f^{(4)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^3}{3!} \\ &+ O(e_n^4). \\ f'(x_n) =& f'(x^*)\Bigg(1 + \frac{2}{2}\frac{f^{(2)}(x^*)}{f'(x^*)}\frac{(x_n - x^*)}{1!} + \frac{3}{3}\frac{f^{(3)}(x^*)}{f'(x^*)}\frac{(x_n - x^*)^2}{2!} \\ &+ \frac{4}{4}\frac{f^{(4)}(x^*)}{f'(x^*)}\frac{(x_n - x^*)^3}{3!} + O(e_n^4)\Bigg). \end{aligned} \tag{11}$$

Selanjutnya dengan melakukan penyederhanaan pada persamaan (11), diperoleh

$$f'(x_n) = f'(x^*)\big(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)\big). \tag{12}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama untuk $f^{(2)}(x_n)$ diekspansikan dengan Teorema Taylor di sekitar $x_n = x^*$, sehingga diperoleh

$$f^{(2)}(x_n) = f'(x^*)\left(2c_2 + 6c_3e_n + 12c_4e_n^2 + O(e_n^5)\right). \tag{13}$$

Kemudian persamaam (10) dibagi dengan persamaan (12) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x^*)\big(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5)\big)}{f'(x^*)\big(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^5)\big)}. \tag{14}$$

Dengan menggunakan formula deret geometri pada persamaan untuk melakukan penyederhanaan pada persamaan (14) dengan $r = 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3$, sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{15}$$

Untuk menghitung $\big(f(x_n)\big)^2$ digunakan dari persamaan (10), diperoleh

$$\big(f(x_n)\big)^2 = \big(f'(x^*)\big)^2\big(e_n^2 + 2c_2e_n^3 + 2c_3e_n^4 + c_2^2e_n^4 + O(e_n^5)\big). \tag{16}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan persamaan (10), (12), (13), (15), dan persamaan (16) ke persamaan (6), setelah penyederhanaan diperoleh

$$e_{n+1} = (2c_2^2 - 4\alpha c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{17}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, persamaan (6) konvergen kubik. Dengan mengambil $\alpha = \frac{1}{2}$, maka diperoleh

$$e_{n+1} = -c_3e_n^3 + O(e_n^4). \tag{18}$$

Dari definisi orde konvergensi [3, h.77] diperoleh famili metode Chebyshev memiliki kekonvergenan orde tiga, maka Teorema 1 terbukti. □

Metode famili Chebyshev memiliki kekonvergenan orde tiga, dengan tiga kali evaluasi fungsi pada setiap iterasi. Berdasarkan definisi indek efisiensinya [5, h.12] adalah $3^{\frac{1}{3}} = 1.442$.

Teorema 2 (Orde Konvergensi Variasi Metode Chebyshev) Misalkan $x^* \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang terdiferensialkan secukupnya pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat dengan ke akar x^*, maka orde kekonvergenan metode pada rumus (8) adalah empat jika $(\alpha, a) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Bukti: Misalkan $e_n = x_n - x^*$ sehingga $x_n = x^* + e_n$, dan $s_n = y_n - x^*$, dengan mensubtitusikan persamaan (15) ke persamaan (7), diperoleh

$$y_n = x^* + e_n - a\left(e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{19}$$

Dari pemisalan $s_n = y_n - x^*$, maka diperoleh

$$s_n =(1-a)e_n + ac_2e_n^2 - a(2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - a(4c_2^3 + 7c_2c_3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{20}$$

Kemudian dihitung ekspansi Taylor $f(y_n)$ di sekitar $y_n = x^*$ sampai turunan kelima

$$\begin{aligned} f(y_n) =& f(x^*) + f'(x^*)\frac{(y_n - x^*)}{1!} + f^{(2)}(x^*)\frac{(y_n - x^*)^2}{2!} + f^{(3)}(x^*)\frac{(y_n - x^*)^3}{3!} \\ &+ f^{(4)}(x^*)\frac{(y_n - x^*)^4}{4!} + O(e_n^5). \end{aligned} \tag{21}$$

Dari pemisalan $s_n = y_n - x^*$, dan $f(x^*) = 0$, lalu persamaan (21) menjadi

$$f(y_n) = f'(x^*)\left(s_n + \frac{f^{(2)}(x^*)}{f'(x^*)2!}s_n^2 + \frac{f^{(3)}(x^*)}{f'(x^*)3!}s_n^3 + \frac{f^{(4)}(x^*)}{f'(x^*)4!}s_n^4 + O(e_n^5)\right),$$

atau

$$f(y_n) = f'(x^*)\big(s_n + c_2s_n^2 + c_3s_n^3 + c_4s_n^4 + O(e_n^5)\big), \tag{22}$$

dengan menyatakan $c_k = \frac{f^{(k)}(x^*)}{f'(x^*)k!}$. Selanjutnya dengan cara yang sama untuk $f^{(2)}(y_n)$ diekspansikan dengan Deret Taylor di sekitar $y_n = x^*$, sehingga didapat

$$f^{(2)}(y_n) = f'(x^*)\big(2c_2 + 6c_3 s_n + 12c_4 s_n^2 + O(e_n^5)\big). \tag{23}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (20) pada persamaan (23), maka diperoleh

$$\begin{aligned} f^{(2)}(y_n) = f'(x^*)\Bigg(&2c_2 + (6c_3 - 6a\ c_3)e_n + (6a\ c_2c_3 + 12c_4 + 12a^2\ c_4 - 24a\ c_4)e_n^2 \\ &+\big(24ac_2c_4(1-a) + 20c_5 + 12a(c_3^2 - c_2) - 60ac_5(1-a-a^2)\big)e_n^3 \\ &+(24ac_2^3c_3 - 42ac_2c_3^2 + 66ac_3c_4 - 48ac_2^2c_4 - 48a^2c_3c_4 + 60a^2c_2^2c_4 \\ &\quad - 120a^2c_3^2 + 60a^3c_2c_5 + 30c_6(1 - 4a - 60a^2 - 40a^3 + a^4))e_n^4 \\ &\quad + O(e_n^5)\Bigg). \end{aligned} \tag{24}$$

Kemudian dengan menghitung $\big(f(x_n)\big)^2 f'(x_n)f^{(2)}(y_n)$, dari persamaan (12), (16), dan (24), setelah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned} \big(f(x_n)\big)^2 f'(x_n)f^{(2)}(y_n) = \big(f'(x^*)\big)^4\Bigg(&2c_2e_n^2 + (8c_2^2 - 6ac_3 + 6c_3)e_n^3 \\ &+(10c_2^3 - 18a\ c_2c_3 + \ 12a^2c_4 \\ &\quad - 24ac_4 + 34c_2c_3 + 12c_4)e_n^4 + O(e_n^5)\Bigg). \end{aligned} \tag{25}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (10), (12), dan persamaan (24), untuk menghitung, $\big(f'(x_n)\big)^4 + \alpha^2\big(f(x_n)\big)^2\big(f^{(2)}(y_n)\big)^2 - 2\alpha f(x_n)\big(f'(x_n)\big)^2 f''(y_n)$, dengan notasi V_1 diperoleh

$$\begin{aligned} V_1 = \big(f'(x^*)\big)^4\Bigg(&1 + (8 - 4\alpha)c_2e_n + (24 - 20\alpha + 4\alpha^2)c_2^2e_n^2 \\ &+ (12 + 12\alpha + 12\alpha a)c_3e_n^2 + 72c_2c_3e_n^3 + 16c_4^3e_n^3 \\ &+ 32(1 - \alpha + 8\alpha^2)c_2^3e_n^3 - 24\alpha(1 - 2a + a^2)c_4e_n^3 \\ &+ (48\alpha a - 88\alpha - 24\alpha^2a + 24\alpha^2)c_2c_3e_n^3 \\ &+ \big(96c_2 + (16 - 16\alpha + 4\alpha^2)c_2^2 \\ &+ (144 - 184\alpha + 56\alpha^2 + 160\alpha a - 120\alpha a^2 + 40\alpha a^3)c_2^2c_3 \\ &+ (54 - 84\alpha + 36\alpha^2 + 36\alpha^2a^2 - 72\alpha^2a + 60\alpha a)c_3^2 \\ &- (156\alpha - 192\alpha a + 72\alpha a^2 + 96\alpha^2a - 48\alpha^2a^2 - 48\alpha^2)c_2c_4 \\ &+ (16 - 16\alpha + 4\alpha^2)c_2^4\big)e_n^4 + O(e_n^5)\Bigg). \end{aligned} \tag{26}$$

Selanjutnya dengan menghitung $\dfrac{1}{V_1}\Bigg(\big(f(x_n)\big)^2 f'(x_n)f^{(2)}(y_n)\Bigg)$ dari persamaan (25), dan persamaan (26), dan dengan penyederhanaan menggunakan deret geometri, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\big(f(x_n)\big)^2 f'(x_n) f^{(2)}(y_n)\frac{1}{V_1} &= 2c_2e_n^2 + (6c_3 - 8c_2^2 - 6ac_3 + 8\alpha c_2^2)e_n^3 \\
&\quad +(48\alpha c_2c_3 - 38c_2c_3 + 30ac_2c_3 - 48\alpha ac_2c_3 \\
&\qquad + 26c_2^3 + 24\alpha^2c_2^3 - 56\alpha c_2^3 + 12c_4 - 24ac_4 \\
&\qquad + 12a^2c_4)e_n^4 + O(e_n^5). \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Kemudian dengan mensubtitusi persamaan (15) dan persamaan (27), pada persamaan (8), dan setelah melakukan penyederhanaan diperoleh

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} =& \big((1-2\alpha)2c_2^2 - (1-3a)c_3\big)e_n^3 + \big((28\alpha - 12\alpha^2 - 9)c_2^3 \\
&+ (12 - 24\alpha - 15a + 24a\alpha)c_2c_3 - (3 - 12a + 6a^2)c_4\big)e_n^4 + O(e_n^5). \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Dengan mengambil nilai $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $a = \frac{1}{3}$, maka diperoleh

$$
e_{n+1} = \big(2c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{3}c_4\big)e_n^4 + O(e_n^5). \qquad (29)
$$

Dari definisi orde konvergensi [3, h.77] diperoleh variasi metode Chebyshev memiliki kekonvergenan orde empat, maka Teorema 2 terbukti. □

Variasi metode Chebyshev memiliki kekonvergenan orde empat dan memerlukan tiga kali evaluasi fungsi pada setiap iterasi. Berdasarkan definisi indek efisiensinya [5, h.12] adalah 1.587.

4. UJI KOMPUTASI

Berikut ini akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan banyak iterasi dari metode. Dalam melakukan perbandingan ini, persamaan nonlinear yang digunakan adalah:

$$
\begin{array}{ll}
f_1(x) = e^x - 4x^2, & x^* = 0.7148059123627778, \\
f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10, & x^* = 1.3652300134140968, \\
f_3(x) = \cos(x) - x, & x^* = 0.7390851332151606, \\
f_4(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, & x^* = 0.2575302854398608, \\
f_5(x) = xe^{x^2} - \sin(x^2) + 3\cos(x) + 5, & x^* = -1.2076478271309189, \\
f_6(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1, & x^* = 1.4044916482153412.
\end{array}
$$

Dalam menentukan solusi numerik dari keenam persamaan nonlinear di atas, digunakan tebakan awal x_0 yang berbeda, karena tebakan awal berpengaruh terhadap keberhasilan dalam menghampiri akar dan juga terhadap jumlah iterasi yang dihasilkan. Hasil komputasi yang dilakukan dengan menggunakan metode Newton (MN), metode Chebyshev (MC), metode Chebyshev-Halley (MCH), metode Jarat (MJ), famili metode Chebyshev (MFC), dan Variasi metode Chebyshev (MVC). Perbandingan hasil komputasi keenam metode untuk keenam fungsi di atas menggunakan program komputer Maple 13.

Tabel 1: Perbandingan Uji Komputasi untuk MN, MC, MCH, MJ, MFC, dan MVC

Metode	f_1			f_2			f_3		
	0.5	1.0	2.0	1.0	1.5	2.0	0.0	0.5	1.5
MN	5	5	6	5	5	6	6	5	5
MC	4	4	5	4	3	4	4	3	4
MCH	4	4	5	4	3	4	4	3	4
MJ	3	3	4	3	3	3	3	3	3
MFC	3	3	4	3	3	3	4	3	3
MVC	3	3	4	3	3	3	3	3	3

Tabel 2: Perbandingan Uji Komputasi untuk MN, MC, MCH, MJ, MFC, dan MVC

Metode	f_4			f_5			f_6		
	-0.5	0.0	1.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.5	1.0	3.0
MN	5	4	4	6	6	10	8	6	6
MC	3	3	4	4	4	-	-	5	5
MCH	3	3	4	4	4	6	-	4	5
MJ	3	2	3	3	3	4	5	3	4
MFC	3	3	4	4	4	5	6	4	4
MVC	3	3	3	3	3	5	6	4	4

Pada Tabel 1 dan Tabel 2 kolom pertama menyajikan metode, kolom kedua sampai kesembilan menyajikan jumlah iterasi dari fungsi berserta nilai tebakan awal. Pada fungsi pertama sampai fungsi yang ke empat dengan setiap tebakan awalnya dapat dilihat bahwa metode yang berorde empat lebih cepat dibandingkan metode yang berorde tiga dan dua dalam menghampiri nilai akar. Pada fungsi kelima dari Tabel 2 terlihat bahwa ada metode yang gagal dalam menghampiri akar pada tebakan awal $x_0 = -0.5$ yaitu metode Chebyshev(MC). Untuk fungsi yang keenam terdapat juga kegagalan metode dalam menghampiri akar pada tebakan awal $x_0 = 0.5$ yaitu metode Chebyshev(MC) dan metode Chebyshev-Halley (MCH).

Untuk setiap fungsi yang diberikan dengan tebakan awal yang berbeda famili metode Chebyshev (FMC), dan Variasi metode Chebyshev (VMC) selalu berhasil menghampiri akar. Berdasarkan Orde konvergensi, dan Indek Efisiensi maka metode Chebyshev yang memiliki orde kekonvergenan tiga [6, h.88] dan indek efisiensinya adalah 1.442, metode Chebyshev-Halley memiliki orde kekonvergenan tiga [2] dan indek efisiennya sama dengan 1.442, dan metode famili Chebyshev memiliki kekonvergenan orde tiga, dan indek efisiensinya adalah 1.442. Sedangkan variasi metode Chebyshev memiliki kekonvergenan orde empat dan indek efisiensinya adalah 1.587 terlihat bahwa metode variasi metode Chebyshev lebih optimal dibandingkan metode Chebyshev, metode Chebyshev-Halley dan metode famili Chebyshev.

UCAPAN TERIMA KASIH

Di ucapkan terimakasih kepada Bapak Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Behl, R & Kanwar, V. 2013. Variants of Chebyshev's Method with Optimal Order of Convergence. *Tamsui Oxford Journal of International and Mathematical Sciences,* **29**: 39–53.

[2] Hernandez, M. A & Salanova, M. A. 1993. A Family of Chebyshev-Halley Type Method. *International Journal of Computer Mathematics,* **47**: 59–63.

[3] Mathews, J. H. 1992. *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering, 2^{nd} Ed.* Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.

[4] Schroder, E. 1992. On Infinitely Many Algorithms for Solving Equations. Terj. dari *Uber Unendlich Viele Algorithmen Zur Auflosung der Gleichhungen,* **211**:383–391, oleh Stewart, G.W, *Departement of Computer Science, University of Maryland, College Park,* **TR**–2990.

[5] Traub, J. F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[6] Wait, R. 1979. *The Numerical Solution of Algebraic Equations.* John Wiley & Sons, Inc., Chicester.